آزمون جامع (۱)

۱. گزینهٔ «۴»

برای حل این مسأله باید بر اتحاد جبری هم مسلط باشید. برای یادآوری داریم:

$$\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \end{cases}$$

هم‌چنین از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}\ ,\ \tan\alpha\cot=1$$

با توجه به توضیحات بالا داریم:

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}\xrightarrow{\sin 2x=\frac{1}{3}}$$

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6\ (*)$$

حال عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A=\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^3 x+\cot^3 x}$$

$$=\frac{(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x}{(\tan x+\cot x)^3-3\tan x\cot x(\tan x+\cot x)}\Rightarrow$$

$$A=\frac{(6)^2-2\times 1}{(6)^3-3\times 1\times(6)}=\frac{36-2}{216-18}=\frac{34}{198}=\frac{17}{99}$$

۲. گزینهٔ «۳»

یادآوری:

$$\begin{cases} \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}) \\ 1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=(\sin x-\cos x)^2\Rightarrow$$

$$2\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=(\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4}))^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})=\cancel{2}\sin^2(x-\frac{\pi}{4})\longrightarrow$$

$$\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})-\sin^2(x-\frac{\pi}{4})=0$$

$$\Rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{4})(\sqrt{2}-\sin(x-\frac{\pi}{4}))=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin(x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ \sin(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۳. گزینهٔ «۱»

$$\frac{\sin 145^\circ-\sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}=\frac{\sin(\overbrace{180^\circ-35^\circ}^{\text{ربع دوم}})-\sin(\overbrace{270^\circ-35^\circ}^{\text{ربع سوم}})}{\cos(\underbrace{360^\circ-35^\circ}_{\text{ربع چهارم}})}$$

$$=\frac{\sin 35^\circ+\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=\frac{\sin 35^\circ}{\cos 35^\circ}+\frac{\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=$$

$$\tan 35^\circ+1=2a-1+1=2a$$

۴. گزینهٔ «۲»

با توجه به اتحاد $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ داریم:

$$\sin\underbrace{x}_{\alpha}\cos\underbrace{6x}_{\beta}+\sin 6x\cos x=1\Rightarrow \sin(x+6x)=1$$

$$\Rightarrow \sin 7x=1$$

$$\Rightarrow 7x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{7}+\frac{\pi}{14}\xrightarrow{k=1}x=\frac{5\pi}{14}$$

۵. گزینهٔ «۳»

اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ‌نامه‌ی کلیدی گزینهٔ (۱) خورده.

با توجه به اتحاد $\sin(\alpha+\beta)$ داریم:

$$\cos x\cos 3x(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x})=$$

$$=\cancel{\cos x\cos 3x}\,(\frac{\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x}{\cancel{\cos x\cos 3x}})$$

$$=\sin\underbrace{x}_{\alpha}\cos\underbrace{3x}_{\beta}+\sin 3x\cos x=\sin(x+3x)=\sin 4x$$

با توجه به فرمول $\sin 2\alpha$ داریم:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\xrightarrow{\alpha=2x}\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x(*)$$

از آنجایی که $0<x<\frac{\pi}{4}$ است $0<2x<\frac{\pi}{2}$ بوده و بنابراین در ناحیهٔ اول مثلثاتی هستیم:

$$\sin^2 2x+\cos^2 2x=1\Rightarrow \cos^2 2x=1-\sin^2 2x=1-(\frac{3}{5})^2=\frac{16}{25}$$

$$\xrightarrow[\text{ربع اول}]{\cos 2x>0}\cos 2x=\frac{4}{5}$$

با جایگذاری در رابطه (*) داریم:

$$\sin 4x=2\sin 2x\cos 2x=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

۶. گزینهٔ «۱»

روش اول:

$$2\sin^2 a+\sin a\cos a(\frac{\cos a}{\sin a}-\frac{\sin a}{\cos a})=$$

$$2\sin^2 a+\cancel{\sin a\cos a}\,(\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\cancel{\sin a\cos a}})$$

$$=2\sin^2 a+\cos^2 a-\sin^2 a=\sin^2 a+\cos^2 a=1$$

روش دوم:

کافی است به جای a، $\frac{\pi}{4}$ را جایگزین نماییم:

$$2\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\underbrace{(\cot\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{4})}_{\text{صفر}}=2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+0=1$$

۷. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که $\sin 2x=2\sin x\cos x$، پس برای پیدا کردن $\sin x\cos x$ کافی است عبارت $(\sin x-\cos x)$ را به توان دو برسانیم:

$$(\sin x-\cos x)^2=(\frac{\sqrt{5}}{7})^2\Rightarrow$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x=\frac{5}{49}$$

$$\Rightarrow 1-2\sin x\cos x=\frac{5}{49}\Rightarrow$$

$$1-\frac{5}{49}=2\sin x\cos x \Rightarrow \frac{44}{49}=2\sin x\cos x \Rightarrow \sin 2x=\frac{44}{49}$$

۸. گزینهٔ «۱»

$$\sin^2 x+2\cos^2 x=\frac{3}{2} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}+\cos^2 x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\cos^2 x=\frac{3}{2} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$

از طرفی می‌دانیم که $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$، پس:

$$1+\tan^2 x=\frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 1+\tan^2 x=2 \Rightarrow \tan^2 x=1$$

۹. گزینهٔ «۲»

با توجه به فرمول‌های $\frac{\pi}{2}-\alpha$، می‌دانیم که $\cot\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$$\tan 3x=\cot 2x \Rightarrow \tan 3x=\tan(\frac{\pi}{2}-2x)$$

$$\Rightarrow 3x=k\pi+(\frac{\pi}{2}-2x) \Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 5}$$

$$x=\frac{k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

با توجه به فرمول‌های 2α، می‌دانیم که $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$، پس:

$$\cancel{1+\cos 2x}=\cancel{2\cos^2 x}+\sin 2x\cos x \Rightarrow \sin 2x\cos x=0$$

$$\begin{cases}\sin 2x=0 \Rightarrow 2x=k\pi \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2} & (1)\\ \cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} & (2)\end{cases}$$

جواب‌های رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) هم وجود دارد، پس جواب کلی معادله $\frac{k\pi}{2}$ است.

آزمون جامع (۲)

۱. گزینهٔ «۴»

$$(1+\tan^2 x)\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=1 \longrightarrow (\frac{1}{\cos^2 x})(-\sin x)^2=1$$

$$\Rightarrow \tan^2 x=1 \Rightarrow \tan x=\pm 1 \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

۲. گزینهٔ «۱»

با توجه به محدودهٔ θ، متوجه می‌شویم که انتهای کمان θ در ربع سوم قرار دارد، پس:

$$A=\sqrt{(\sin^2\theta+\sin^2\theta\cot\theta)+(\cos^2\theta+\cos^2\theta\tan\theta)} \Rightarrow$$

$$A=\sqrt{\sin^2\theta+\cancel{\sin^2\theta}\times\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}}+\cos^2\theta+\cancel{\cos^2\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}}$$

$$\Rightarrow A=\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$

$$\Rightarrow A=|\underbrace{\sin\theta}_{\text{منفی}}+\underbrace{\cos\theta}_{\text{منفی}}| \Rightarrow A=-(\sin\theta+\cos\theta)$$

۳. گزینهٔ «۴»

می‌دانیم که $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$، پس:

$$3\cos x+\sqrt{3}\sin x=3$$

$$\xrightarrow{\div 3}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin x=1 \xrightarrow{\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\cos x+\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\sin x=1 \Rightarrow \frac{\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=1 \Rightarrow \cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴. گزینهٔ «۲»

با توجه به شکل تابع داریم:

$$f(0)=-1 \Rightarrow a+\sin(0)=-1 \Rightarrow a+0=-1 \Rightarrow a=-1$$

از طرف دورهٔ تناوب تابع برابر ۸ است یعنی همان $(14-6)$، از طرفی می‌دانیم که دورهٔ تناوب تابع $\sin kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است، پس:

$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=8 \Rightarrow |b|=\frac{1}{4} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{4}$$

از آنجایی که نمودار سینوسی است و در $x=0$ به جای این‌که به سمت بالا حرکت کند به سمت پایین رفته است متوجه می‌شویم که نمودار رسم شده شبیه $-\sin x$ است پس $b=-\frac{1}{4}$ قابل قبول بوده و داریم:

$$y=a+\sin b\pi x \xrightarrow[b=-\frac{1}{4}]{a=-1} y=-1+\sin(-\frac{1}{4}\pi x)$$

$$\Rightarrow y=-1-\sin(\frac{\pi}{4}x) \xrightarrow{x=\frac{26}{3}} y=-1-\sin(\frac{\pi}{4}\times\frac{26}{3})$$

$$\Rightarrow y=-1-\sin(\frac{13\pi}{6})=-1-\sin(2\pi+\frac{\pi}{6})=-1-\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow y=-1-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

۵. گزینهٔ «۴»

$$\tan(\underbrace{\frac{3\pi}{2}-\alpha}_{\text{ربع سوم}})=\cot\alpha$$

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-(-\frac{\sqrt{10}}{10})^2=1-\frac{10}{100}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

$$\xrightarrow[\sin\alpha<0]{\alpha\text{ در ناحیهٔ سوم است}}\sin\alpha=\frac{-3}{\sqrt{10}}=\frac{-3\sqrt{10}}{10}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{10}}{10}}{-\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{1}{3}$$

۶. گزینهٔ «۴»

روش اول: یادآوری:

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}, \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

با توجه به فرمول‌های بالا، عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\sin^2 2\alpha(1+\tan^2\alpha+1+\cot^2\alpha)$$

$$=(2\sin\alpha\cos\alpha)^2(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha})$$

$$=\cancel{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\,(\overbrace{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cancel{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}}}^{1})=4\times 1=4$$

روش دوم: کافی است به جای α، $\frac{\pi}{4}$ را جایگزین نماییم:

$$\sin^2(\frac{2\pi}{4})(2+\tan^2\frac{\pi}{4}+\cot^2\frac{\pi}{4})=(1)(2+1+1)=4$$

۷. گزینهٔ «۱»

$$(\frac{1}{\cos x}-1)(\frac{1}{\cos x}+1)=1 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{1}{\cos^2 x}-1=1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}=2 \Rightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}=\cos^2\frac{\pi}{4} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$$

۸. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ معکوس یکدیگرند و از طرفی هم می‌دانیم که مجموع دو عدد معکوس هیچگاه در بازه‌ی $(-2,2)$ قرار نمی‌گیرد، پس:

$$a+\frac{1}{a}\notin(-2,2) \xrightarrow{a=\tan\alpha} \tan x+\cot x=\sqrt{3}\notin(-2,2)$$

پس معادله هیچ ریشه‌ای ندارد.

۹. گزینهٔ «۴»

$$\sin\frac{5\pi}{4}+\sin(\cancel{4\pi}-\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{3\pi}{4})+\sin\frac{9\pi}{4}=$$

$$\sin(\underbrace{\pi+\frac{\pi}{4}}_{\text{ربع سوم}})+\sin(-\frac{\pi}{4})+\sin\frac{3\pi}{4}+\sin(\cancel{2\pi}+\frac{\pi}{4})=$$

$$=-\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}-\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}+\cancel{\sin\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ‌نامه کلیدی گزینهٔ «۲» خورده.

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{۲} \Rightarrow \sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = -\sqrt{۲} \Rightarrow$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = -۱ \Rightarrow x+\frac{\pi}{۴} = \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{\pi}{۴} = \frac{۵\pi}{۴}$$

$$\sin^۳ x + \cos^۵ x \xlongequal{x=\frac{۵\pi}{۴}} \sin^۳ \frac{۵\pi}{۴} + \cos^۵ \frac{۵\pi}{۴}$$

$$= (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۳ + (-\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۵$$

$$= \frac{-۲\sqrt{۲}}{۸} - \frac{۴\sqrt{۲}}{۳۲} = \frac{-۸\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲}}{۳۲} = \frac{-۱۲\sqrt{۲}}{۳۲} = \frac{-۳\sqrt{۲}}{۸}$$

آزمون جامع (۳)

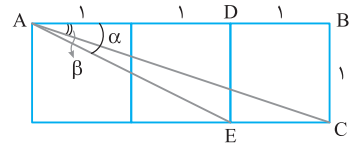
۱. گزینهٔ «۳»

$$\cos 3x+\cos 2x=0 \Rightarrow \cos 3x=-\cos 2x$$
$$\Rightarrow \cos \underbrace{3x}_{3x}=\cos(\underbrace{\pi-2x}_{\alpha})$$
$$\xrightarrow{X=2k\pi\pm\alpha}\begin{cases}3x=2k\pi+(\pi-2x)\\3x=2k\pi-(\pi-2x)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=2k\pi+\pi\\x=2k\pi-\pi\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5} & (1)\\x=2k\pi-\pi & (2)\end{cases}$$

جواب‌های رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) قرار دارد، پس جواب کلی معادله $\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{5}$ است. این جواب را به صورت $(2k+1)\frac{\pi}{5}$ می‌توان نوشت یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{5}$ که با گزینهٔ «۳» یکسان است.

۲. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$، حال با توجه به شکل و رابطه‌ی نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\begin{cases}AE^2=AD^2+DE^2=4+1=5\rightarrow AE=\sqrt{5}\\AC^2=AB^2+BC^2=9+1=10\rightarrow AC=\sqrt{10}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\alpha=\frac{AD}{AE}=\frac{2}{\sqrt{5}}\\\sin\alpha=\frac{DE}{AE}=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases},\begin{cases}\cos\beta=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{\sqrt{10}}\\\sin\beta=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{6-1}{\sqrt{50}}$$
$$=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳. گزینهٔ «۲»

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-(\frac{1}{\sqrt{5}})^2=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$
$$\xrightarrow{\text{ناحیهٔ چهارم}}\sin x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=-2$$
$$\Rightarrow\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$

۴. گزینهٔ «۳»

ابتدا تابع داده شده را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$y=a^2\cos(\underbrace{\frac{\pi}{2}+b\pi x}_{\text{ربع دوم}})=a^2(-\sin b\pi x)=-a^2\sin b\pi x$$
$$\Rightarrow y=a^2\sin(-b\pi x)(*)$$

با توجه به ضابطه‌ی تابع، مقدار ماکزیمم تابع برابر a^2 است، پس $a^2=2$. هم‌چنین دورهٔ تناوب تابع با توجه به نمودار به صورت $\frac{3}{2}T=4$ است یعنی $T=\frac{8}{3}$. از طرفی از روی ضابطه برابر است با:

$$\frac{2\pi}{|-b\pi|}=\frac{2}{|b|}=\frac{8}{3}\Rightarrow|b|=\frac{3}{4}\Rightarrow b=\pm\frac{3}{4}$$

با توجه به رابطه‌ی (*) b باید منفی باشد، زیرا نمودار تابع رفتاری همانند نمودار تابع $(+\sin x)$ دارد، پس:

$$a^2+b=2+(-\frac{3}{4})=\frac{5}{4}$$

۵. گزینهٔ «۳»

اصلاحیه: به اشتباه در پاسخ‌نامه کلیدی گزینهٔ «۲» خورده.

$$\sin x=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$
$$\Rightarrow\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{3}{4}$$

با توجه به فرمول‌های 2α داریم:

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$$
$$\Rightarrow\tan 2x=\frac{24}{7}\Rightarrow\tan(\underbrace{\frac{\pi}{2}+2x}_{\text{ربع دوم}})=-\cot 2x=-\frac{7}{24}$$

۶. گزینهٔ «۴»

در سؤال گفته شده است که این تساوی یک اتحاد است، پس باید به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد، لذا کافی است به جای x عدد صفر را جایگزین نمایم:

$$\frac{1}{\cos^4(0)}+\frac{A}{\cos^2(0)}=\tan^4(0)-1\Rightarrow\frac{1}{1}+\frac{A}{1}=0-1\Rightarrow A=-2$$

۷. گزینهٔ «۲»

با توجه به فرمول‌های $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$ و $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ و به ازای $\alpha=10^\circ$ داریم:

$$2\cot 10^\circ(\frac{1}{\sin 20^\circ}-\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ})=2\cot 10^\circ(\frac{1-\cos 20^\circ}{\sin 20})$$
$$=\frac{2\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ}(\frac{2\sin^2 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ})=2$$

۸. گزینهٔ «۳»

روش اول:

$$\frac{\cos(2\alpha+\alpha)+\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+2\alpha)-\sin 2\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha-\cancel{\sin 2\alpha\sin\alpha}+\cancel{\sin\alpha\sin 2\alpha}}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\cancel{\sin 2\alpha\cos\alpha}-\cancel{\sin 2\alpha\cos\alpha}}$$
$$=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha}=\cot\alpha$$

روش دوم: **عدد گذاری**،کافی است به جای α، مقدار $\frac{\pi}{3}$ را جایگزین نمایید و سپس $\frac{\pi}{3}$ را در گزینه‌ها هم قرار دهید.

۹. گزینهٔ «۱»

$$\tan ۶۰^\circ \sin x + \cos x = m - ۱ \Rightarrow \frac{\sin ۶۰^\circ}{\cos ۶۰^\circ}\sin x + \cos x =$$

$$(m-۱) \xrightarrow{\times \cos ۶۰^\circ} \sin ۶۰^\circ \sin x + \cos ۶۰^\circ \cos x$$

$$= (m-۱)\times \cos ۶۰^\circ \Rightarrow \cos(x - ۶۰^\circ) = (m-۱)\times \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos(x-۶۰^\circ) = \frac{m-۱}{۲} \xrightarrow{-۱\le \cos\alpha \le ۱} -۱ \le \frac{m-۱}{۲} \le ۱ \xrightarrow{\times ۲}$$

$$-۲ \le m-۱ \le ۲ \Rightarrow -۱ \le m \le ۳$$

۱۰. گزینهٔ «۱»

می‌دانیم که $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ است، پس:

$$\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = \cos(\frac{\pi}{۴} - x)$$

از طرفی $(x+\frac{\pi}{۴}) + (\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{\pi}{۲}$، پس کمان‌های $x + \frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\pi}{۴} - x$ متمم هم هستند.

لذا:

$$\cos(x - \frac{\pi}{۴}) = \sin(x + \frac{\pi}{۴})(*)$$

بنابراین:

$$۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})\cos(x-\frac{\pi}{۴}) = ۱ \xrightarrow{(*)} ۲\sin(x+\frac{\pi}{۴})\sin(x+\frac{\pi}{۴}) = ۱$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲(x+\frac{\pi}{۴}) = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \sin^۲(x+\frac{\pi}{۴}) = \sin^۲\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x + \frac{\pi}{۴} = \pm\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \Rightarrow \cos ۲x = \cos(۰) = ۱ \\ \text{یا} \\ x = -\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos(-\pi) = -۱ \end{cases} \Rightarrow \cos ۲x = \pm ۱$$